Introducción a la teoría de óperads.

Un enfoque combinatorio

Pares Ordenados

Proyecto

Asesor: Eric Dolores Cuenca
Aprendíz: Jonathan Torres Cardenas

7 de junio de 2024

Resumen

Una óperad es una abstracción de la idea de operación, y como en teoría de grupos, las óperads son de interés cuando nos concentramos en ejemplos particulares, tales como la óperad de los little cubes, la óperad de posets finitos o la óperad del asociahedro.

Nuestro objetivo es estudiar la teoría de operad y sus aplicaciones a la combinatoria.

1 Definiciones

Una óperad [2] es una colección de conjuntos $\{O(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ junto con reglas de composición $\circ_i$ tales que $\circ_i : O(n) \times O(m) \to O(n+m-1)$. Cada elemento de $O(n)$ puede ser representado como un árbol, y la composición equivale a hacer injertos en una de sus ramas. Estas operaciones se deben de comportar de forma intuitiva, es decir, se debe de respetar las operaciones que esperariamos poder hacer al momento de injertar arboles en ramas de otros.

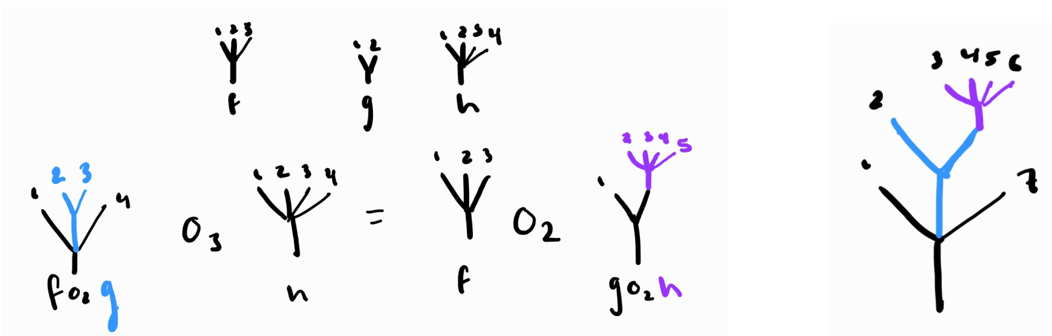


Figura 1. Composición.

De forma concreta, la composición cumple que:

$$(f \circ_j g) \circ_i h = \begin{cases} (f \circ_i h) \circ_{j+p-1} g & : 1 \leq i \leq j-1 \\ f \circ_j (g \circ_{i-j+1} h) & : j \leq i \leq m+j-1 \\ (f \circ_{i-m+1} h) \circ_j g & : i \geq m+j \end{cases}$$

Para todo $f \in O(n)$, $g \in O(m)$ y $h \in O(p)$. Junto con la identidad $1 \in O(1)$ tal que para toda $f \in O(n)$ y $1 \leq i \leq n$ tenemos que

$$1 \circ_1 f = f \circ_i 1 = f$$

Por ejemplo, la óperad de endomorfismos, dado un conjunto X definimos $End_X = \{End_X(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $End_X(n)$ denota el conjunto de funciones de X^n a X, bajo la operación de composición usual de funciones.

Una álgebra o representación sobre la óperad [2] es un conjunto X y una colección de funciones $\phi_n : O(n) \to End_X(n)$, que respeta las operaciones de composición y a la identidad. Esto es, $\phi_1(1) = 1$ y :

$$\phi_{n+m-1}(p \circ_i q) = \phi_n(p) \circ_i \phi_m(q)$$

Para todo $p \in O(n)$, $q \in O(m)$ y $1 \leq i \leq n$.

2 Ejemplos

Óperad de simplices topológicos

Podemos representar distribuciones de probabilidad finitas con los n-simplejos, es decir:

$$\Delta_n := \{(p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n | 0 \leq p_i \leq 1, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}$$

Además, si consideramos la operación de composición $\circ_i : \Delta_n \times \Delta_m \to \Delta_{n+m-1}$ definida por

$$p \circ_i q = (p_1, ..., p_i q_1, ..., p_i q_m, p_{i+1}, ..., p_n)$$

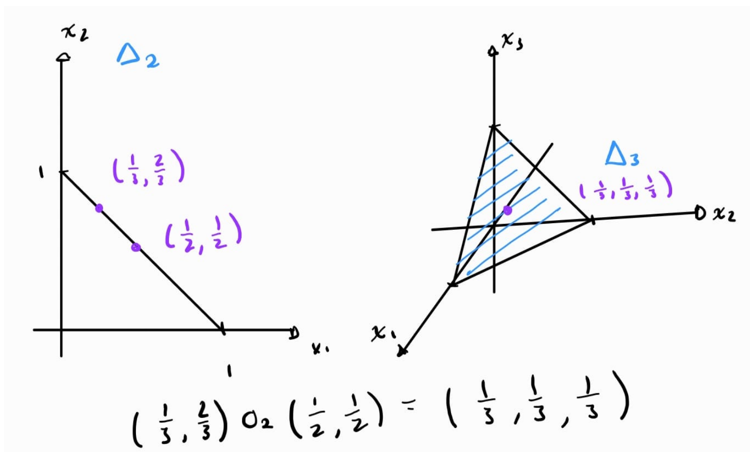


Figura 2. Representación en $\mathbb{R}^n$

Vemos que $\Delta = \{\Delta_1, ...\}$, junto con $\circ_i$ forman una óperad. Más aún, si $X = \mathbb{R}$ y definimos $End_{\mathbb{R}}(n) = Top(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ el espacio de funciones continuas de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ con la topología producto, podemos dar una representación de Δ por medio de las funciones continuas $\phi_n : \Delta_n \to End_{\mathbb{R}}(n)$ dada por $\phi_n(p)(x) := \langle p, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$. Pues si denotamos por $\mathbf{x}$ al vector $(x_1, ..., x_{n+m-1})$:

$$\phi_{n+m-1}(p \circ_i q)(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{i-1} p_k x_k + p_i \sum_{k=1}^{m} q_k x_{k+i-1} + \sum_{k=i+1}^{n} p_k x_{m+k-1} = (\phi_n(p) \circ_i \phi_m(q))(\mathbf{x})$$

Y además $\phi_1(1)(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Óperad de los little cubes

Dado un $k \in \mathbb{N}$ fijo, la óperad de los k-cubos es la colección $\{O(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, donde $O(n)$ es el espacio de todas las configuraciones de n rectángulos de dimensión k contenidos en el k-cubo unitario, con interiores disjuntos (bajo la topología usual de $\mathbb{R}^k$). Formalmente:
La óperad de los d-little cubes $\mathbf{E}_d$ es la colección $\{\mathbf{E}_d(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\mathbf{E}_d(n)$ es el espacio de configuraciones de n cubos de dimensión d que están contenidos en el cubo unitario $[0,1]^d$. Un punto $p \in \mathbf{E}_d(n)$ es una n-tupla, de $f_1, ..., f_n : [0,1]^d \to [0,1]^d$, donde $f_i = (g_1^i, ..., g_d^i)$ y $g_j^i : [0,1] \to [0,1]$ son de la forma $g_j^i(t) = at + b$. Y además, los interiores de los cubos de cada f_i son disjuntos dos a dos. Una representación natural de $\mathbf{E}_d$ se da cuando se considera el espacio

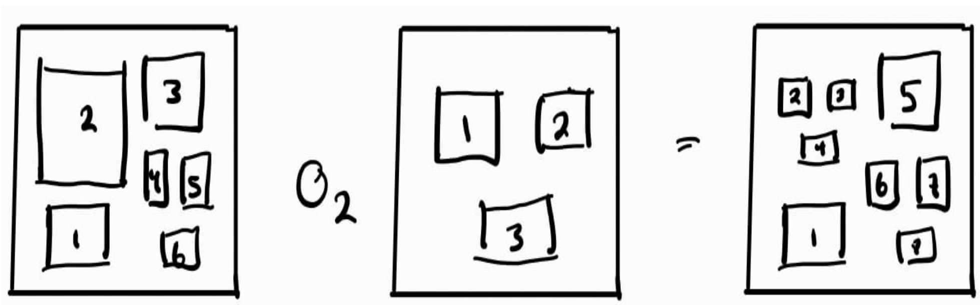


Figura 3. Composición de little cubes

La representación más famosa de esta óperad fue la motivación para la definición y estudio de las óperads. Dado un espacio topológico X y $x_0 \in X$, el espacio de lazos ΩX es el conjunto de todas las funciones continuas $f : [0,1] \to X$, tales que $f(0) = f(1) = x_0$. Es decir, son funciones que transforman el intervalo $[0,1]$ a un lazo en X. Además, podemos iterar este proceso para obtener $\Omega^d X = \Omega(\Omega^{d-1} X)$, que puede ser descrito como el conjunto de funciones $[0,1]^d \to X$ que mapean la frontera a x_0 y son continuas.

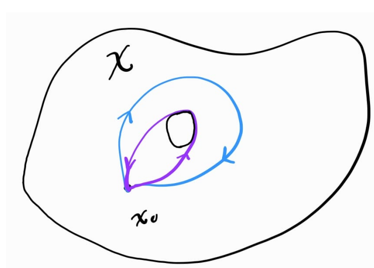


Figura 4. Puntos en ΩX

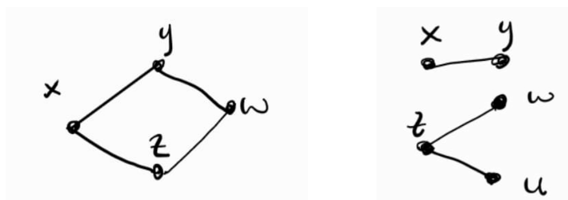
La representación que conseguimos consiste en asignar a cada configuración de n cuadrados, una nueva función $[0,1]^d \to X$, que utiliza a cada rectángulo interior como dominio de un lazo $\lambda \in \Omega^d X$ y el espacio restante de $[0,1]^d$ de la configuración lo manda a x_0. Más concretamente, dada una configuración $(f_1, ..., f_n) \in \mathbf{E}_d(n)$ y n lazos $\lambda_i \in \Omega^d X$, definimos $\lambda : [0,1]^d \to X$ por $\lambda|_{Im(f_i)} = \lambda_i \circ f_i^{-1}$ y $\lambda|_{[0,1]^d \setminus \cup Im(f_i)} = x_0$.

Óperad de posets finitos

Un poset (partial ordered set) es un par $(A, <)$, donde A es un conjunto y $<$ es una relación de orden estricta, es decir, es antisimétrica y transitiva. En particular, un poset finito es cuando el conjunto A es finito, a continuación se presentan algunos ejemplos.

1. $\{x < y < w, x < z < w\}$
2. $\{x < y, z < w, z < u\}$
3. $\langle n \rangle = \{1 < 2 < ... < n\}$

Una forma gráfica y útil de representar un poset es por medio del diagrama de Hasse [3], es decir, un grafo dirigido (A, E), donde $E = \{(p, q) \in A|\ p < q$ y no existe $\ r \in A$ con $p < r < q\}$ es el conjunto de aristas y A el conjunto de vértices, con la convención de que en dos puntos conectados, el de la izquierda es el menor de ellos. Observe que la condición de que no exista un elemento entre p y q es conveniente, ya que si $p < q$ y $q < r$, por transitividad se sigue que $p < r$, por lo que no es necesario escribir la arista de p a r, esto facilita la lectura del diagrama.



Ejemplo 1 Ejemplo 2

Figura 5. Diagramas de Hasse.

Los posets forman una óperad de forma natural al considerar una operación de composición que inserta un poset en lugar de un elemento de otro, pasando de un poset de n elementos a uno de $n + m - 1$ al insertarle un poset de m elementos.

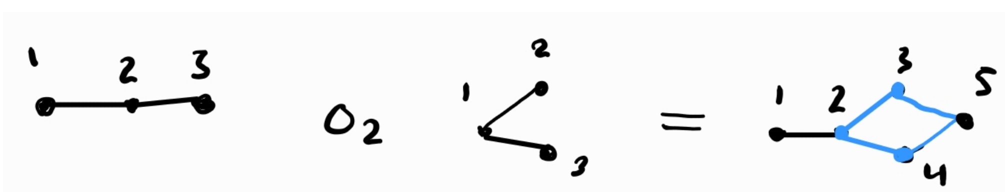


Figura 6. Composición de posets

Una función $f : P \to Q$ entre 2 posets $(P, <_P)$ y $(Q, <_Q)$ se dice que preserva el orden si $f(x) <_Q f(y)$ cuando $x <_P y$. Una pregunta natural es ¿cuántas funciones $f : P \to \langle n \rangle$ que preservan el orden hay?
Veamos los siguientes ejemplos:

1. Si P es el poset de la figura 1, entonces hay 20 funciones $f : P \to \langle 5 \rangle$ que preservan el orden.
2. Si P es el poset de la figura 2, entonces hay 450 funciones $f : P \to \langle 6 \rangle$ que preservan el orden.
3. Si $f : \langle m \rangle \to \langle n \rangle$ con $m < n$, hay exactamente $\binom{n}{m}$.

Para el estudio del comportamiento del conjunto de funciones que preservan el orden, es útil el uso de funciones generadoras. En [1] se define la función generatriz de la sucesión $(\Omega^\circ(X)(n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $\Omega^\circ(X)(n)$ representa la cardinalidad del conjunto A_n, definida por R. Stanley [4], llamada la serie estricta de orden de X.

$$\zeta(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega^\circ(X)(n)x^n$$

En el caso de cadenas $\langle n \rangle$, tenemos el siguiente resultado:

$$\zeta(n) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}$$

Dado dos posets P, Q, definimos dos operaciones:

La concatenación $P * Q = (P \cup Q, <)$, donde $u < v$ si $u, v \in P$ y $u <_P v$ o $u, v \in Q$ y $u <_Q v$ y además, si $u \in P$ entonces $u < v$ para todo $v \in Q$. Y la unión disjunta de dos posets, $P \sqcup Q = (P \sqcup Q, <)$, donde $u < v$ si $u, v \in P$ y $u <_P v$ o $u, v \in Q$ y $u <_Q v$, esto es, consiste en el poset cuyo diagrama de Hasse es la unión de grafos de los diagramas de Hasse de P y Q. A partir de estas operaciones podemos generar posets extensos a partir del más simple posible, $\langle 1 \rangle$.

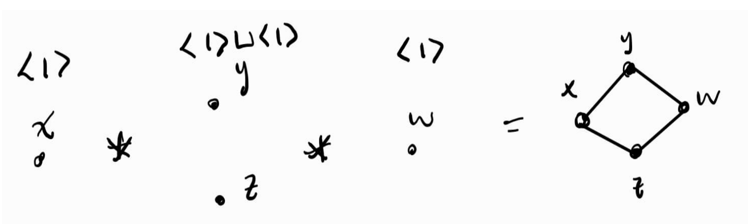


Figura 7. Operaciones en posets

Podemos hacer coincidir a las series generadoras con las operación de concatenación con la siguiente definición:

$$\zeta(X) * \zeta(Y) = \zeta(X)\zeta(Y)(1-x)$$

Esta representación en series de potencias de un poset nos da una álgebra sobre la operad, pues es fácil ver que nuestro elemento de $O(1)$, el poset de un solo elemento, tiene como serie estricta

$$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

Además, tenemos un resultado [1] muy útil en el cálculo de dichas series:

$$\zeta(\langle n\rangle) * \zeta(\langle m\rangle) = \zeta(\langle n\rangle * \langle m\rangle) = \zeta(\langle n\rangle)(1-x)(\langle m\rangle)$$

Demostración. Un cálculo directo nos lleva a

$$\begin{aligned}
\zeta(\langle n\rangle) * \zeta(\langle m\rangle) &= \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}(1-x)\frac{x^m}{(1-x)^{m+1}} \\
&= \frac{x^{n+m}}{(1-x)^{n+m+1}} \\
&= \zeta(\langle n+m\rangle)
\end{aligned}$$

Por tanto, basta ver que $\langle n+m\rangle \simeq \langle n\rangle * \langle m\rangle$, este isomorfismo es el de sus diagramas de Hasse. Para esto, es necesario una biyección entre los conjuntos de puntos que conserve las aristas, por ejemplo $f(i) = i \in \langle n\rangle$ para $i < n+1$ y $f(i) = i - n \in \langle m\rangle$ para $n < i < n+m+1$

$\square$

Para la operación de unión disjunta, tenemos el siguiente resultado [1]

$$\zeta(\langle n\rangle) \sqcup \zeta(\langle m\rangle) = \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{n}\binom{n}{k}\zeta(\langle n+m\rangle)$$

Por último, una aplicación de los resultados.
Sea P el poset del ejemplo 1, note que $P = \langle 1\rangle * (\langle 1\rangle \sqcup \langle 1\rangle) * \langle 1\rangle$, por lo que podemos calcular su serie de orden estricta:

$$\begin{aligned}
\zeta(P) &= \zeta(\langle 1\rangle) * \zeta((\langle 1\rangle \sqcup \langle 1\rangle) * \langle 1\rangle) \\
&= \frac{x}{1-x}\left(\zeta(\langle 1\rangle \sqcup \langle 1\rangle)\,\frac{x}{1-x}\right) \\
&= \frac{x^2}{(1-x)^2}\left(\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3}\right) \\
&= \zeta(\langle 3\rangle) + 2\zeta(\langle 4\rangle) \\
&= (x^3 + 4x^4 + 10x^5 + ...) + 2(x^4 + 5x^5 + ...) \\
&= x^3 + 4x^4 + 20x^5 + ...
\end{aligned}$$

Si consideramos el coeficiente de x^5, tenemos que hay 20 funciones que preservan el orden sobre P, como se había dicho anteriormente.

Referencias

[1] José Antonio Arciniega-Nevárez, Marko Berghoff, and Eric Rubiel Dolores-Cuenca. An algebra over the operad of posets and structural binomial identities. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 29(1):8, 2023.

[2] Tai-Danae Bradley. Entropy as a topological operad derivation. *Entropy*, 23(9):1195, 2021.

[3] Bernd Siegfried Walter Schröder. *Ordered sets: An introduction with connections from combinatorics to topology.* Springer, 2016.

[4] Richard P Stanley. A chromatic-like polynomial for ordered sets. In *Proc. Second Chapel Hill Conf. on Combinatorial Mathematics and its Applications (Univ. North Carolina, Chapel Hill, NC, 1970), Univ. North Carolina, Chapel Hill, NC*, pages 421–427, 1970.